Université A. Assaâdi
Faculté des Sciences
Département de Maths.

OMAR BOUKHOBZA

SMA_SMI
Algèbre S_1
2008-2009

Série n° 2

Exercice 1 : Soit la loi de composition interne $*$ définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1).$$

-) Montrer que $*$ est commutative, non associative et admet un élément neutre.

Exercice 2 : Montrer qu'une loi de c.i. multiplicative sur un ensemble G non vide, lui donne une structure de groupe si et seulement si :

- elle est associative.
- elle admet un élément neutre à droite e : $\forall x \in G \quad xe = x$
- tout élément x de G possède un symétrique x' à droite : $xx' = e$

(Ind. considérer $x'x\,x'\,(x')'$.)

Exercice 3 : Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi c.i. définie par :

$$(x, y) * (x', y') = \left(xx',\ xy' + \frac{y}{x'}\right).$$

1/ Montrer que $(G, *)$ est groupe.

2/- Montrer que $\mathbb{R}^* \times \{0\}$, $\{1\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ sont des sous-groupes

3/- Montrer que pour tout k de $\mathbb{R}$, l'ensemble :

$$H_k = \left\{ \left(x,\ k\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$$ est un sous-groupe commutatif de $(G, *)$.

Exercice 4 : Soit G un groupe multiplicatif et a un élément de G. On définit sur G une loi $*$, en posant :

$$\forall x, y \in G \qquad x * y = xay.$$

1/ Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

2/ Démontrer que l'application de G dans G définie par :

$f(x) = x a^{-1}$ est un isomorphisme de groupe $(G, \cdot)$ dans $(G, *)$.

Exercice 5 : Soit $G =]-1, 1[$ et et T la loi de composition définie par :

$$x T y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

a) Montrer que (G, T) est groupe abélien

b) Montrer que l'application $th : \mathbb{R} \longrightarrow G : th(x) = \frac{sh\,x}{ch\,x}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans (G, T)

ETUDUP .com

Exercice 6 : Soit $A = \left\{ \frac{a}{1+2b} \;/\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ muni de l'addition et la multiplication usuelles.

-) Montrer que $(A, +, \cdot)$ est un anneau.

Exercice 7 : Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. Soit E une partie non vide de A. On pose :

$$J(E) = \{ a \in A \;/\; \forall x \in E \quad x a = 0 \}$$

-) Montrer que $J(E)$ est un idéal de A.

Exercice 8 : (Facultatif). Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif.

-) Montrer l'équivalence :

(a) $(A, +, \cdot)$ est un corps

(b) les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A.

Exercice 9 : Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps commutatif.

On sait que $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

1°/ Démontrer que $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, +, \cdot)$ n'est pas un corps.

2°/ Démontrer que la diagonale de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{K}$.

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un endomorphisme de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$.

-) Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe

Exercice 11 : Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau intègre fini.

-) Montrer que $(A, +, \cdot)$ est un corps

(on pourra introduire l'app. $x \longmapsto ax$, où $a \in A^*$)

Exercice 12 : Soit F un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

-) Montrer que $F = \mathbb{R}$.

Exercice 13 : (Facultatif). Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que $\forall x \in A \quad x^2 = x$

1°/ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2x = 0$

2°/ En déduire que A est commutatif.

Exercice 14 : (Facultatif). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ non carré dans $\mathbb{N}$. ($\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$) et soit $\mathbb{K} = \{ a + b\sqrt{n} \;/\; a, b \in \mathbb{Q} \}$

-) Montrer que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

ETUDUP .com

ETUSUP.com
Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Mécanique
Droit
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
et encore plus..